Theory of Stochastic Processes
Vol.13 (29), no.1-2, 2007, pp.272-280

ТОМАС СИМОН

МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ НЕГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Существует обширная литература по малым уклонениям броуновского движения и общих гауссовских процессов. Здесь представлены некоторые недавние результаты в негауссовском случае, касающиеся в особенности устойчивых процессов и процессов Леви.

1. Введение

Пусть X — случайный процесс и $\|\cdot\|$ — функциональная норма. Интересен вопрос, как ведет себя величина

$$\mathbf{P}\left[\|X\| < \varepsilon\right] \tag{1}$$

при $\varepsilon \to 0$? Эта задача называется проблемой малых уклонений, в отличие от проблемы больших (или умеренных) уклонений, которая исследует

$$\mathbf{P}\left[\|X\| > x\right] \tag{2}$$

при $x \to +\infty$. Скорость сходимости в (1) обычно исследуется в экспоненциальной шкале: ищется критическая экспонента γ и, если возможно, конечная положительная константа κ такая, что

$$-\log \mathbf{P}\left[\|X\| < \varepsilon\right] \;\sim\; \kappa\varepsilon^{-\gamma}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Асимптотика (3) отличается от больших уклонений тем, что экспонента γ не универсальна. Если X — гауссовский процесс и $\|\cdot\|$ — любая норма такая, что п.н. $\|X\| < \infty$, то известно, что (2) ведет себя как хвост стандартной гауссовской меры:

$$-\log \mathbf{P}\left[\|X\| > x\right] \;\asymp\; x^2, \quad x \to \infty.$$

Invited lecture.

2000 *Mathematics Subject Classifications.* 60E07, 60F99, 60G15, 60G17, 60G18, 60G20, 60G52

Key words and phrases. Дробные процессы, малые уклонения, процессы Леви, устойчивые процессы

Однако γ в (1) существенно зависит от процесса и от нормы. Например, Балди и Роинетт (1992) доказали, что

$$-\log \mathbf{P}\left[\|W\|_\alpha < \varepsilon\right] \asymp \varepsilon^{-\frac{2}{2-2\alpha}}, \quad \varepsilon \to 0,$$

где W — броуновское движение и $\|\cdot\|_\alpha$ — норма Гельдера порядка $\alpha \in (0, 1/2)$.

Обзор гауссовского случая был записан Ли и Шау (2001). Задача (3) близка к различным областям анализа, теории вероятностей и статистики. Например:

(А) В немарковской постановке нижняя оценка в (3) связана с так называемой гауссовской корреляционной гипотезой:

$$\gamma(A \cap B) \;\geq\; \gamma(A)\gamma(B),$$

где A, B — симметричные выпуклые множества $\mathbf{R}^n$ и γ — гауссовская мера. В самом деле, можно доказать, что корреляционная гипотеза эквивалентна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left[|X_i| < x_i,\ i = 1, \ldots, n\right] \;\geq\; & \mathbf{P}\left[|X_i| < x_i,\ i = 1, \ldots, p\right] \\ & \times \mathbf{P}\left[|X_i| < x_i,\ i = p+1, \ldots, n\right] \end{aligned} \tag{4}$$

для всех $p = 1, \ldots, n, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ и $X = (X_1, \ldots, X_n)$ гауссовских векторов. Неравенство (4) весьма полезно для дискретизации нижней оценки в (3). Случай $p = 1$ доказал Судак (1968), но другие ситуации еще открыты для изучения.

(Б) Исторически асимптотические результаты типа (3) использовались для доказательства нижних законов повторного логарифма. Чунг (1948) доказал, что оценка

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P}\left[W_1^* < \varepsilon\right] = -\frac{\pi^2}{8} \tag{5}$$

ведет к

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{W_t^*}{\left[t/(\log|\log t|)\right]^{1/2}} \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{8}}, \tag{6}$$

где W — броуновское движение и $W_t^* = \sup_{s \leq t} |W_s|$. Связь между (5) и (6) легко прослеживается благодаря лемме Бореля-Кантелли и $(1/2)$ – автомодельности процесса W.

Также можно уточнить закон повторного логарифма Штрассена. Напомним, что если

$$\eta_n(t) \;=\; W(nt)/(2n \log\log n)^{1/2}, \quad t \in [0, 1],$$

где W — броуновское движение, результат Штрассена утверждает, что предельное множество η_n — это нормализованное (т.е. с нормой меньше чем 1) пространство Камерона-Мартина $\mathbf{K}$. Де Акоста (1983) выводит из (6), что если $\|f\|_{\mathbf{K}} < 1$, то

$$\liminf_{n\to\infty} (\log\log n)\|\eta_n - f\|_\infty \;=\; \pi/4\left(1 - \|f\|_{\mathbf{K}}^2\right)^{-1/2}.$$

Когда $f \equiv 0$, это закон Чунга. Когда $f \not\equiv 0$, доказательство основывается на теории вероятности сдвинутых малых шаров, сформулированной А. А. Могульским (1974). В критической ситуации $\|f\|_{\mathbf{K}} = 1$, Гриль (1992) доказывает, что скорость сходимости лежит между $(\log\log n)^{2/3}$ (включительно) и $\log\log n$ (не включительно).

(B) Есть еще другие, менее классические связи с так называемыми энтропийными числами. В общих словах, рассмотрим гауссовский процесс X как случайный элемент в банаховом пространстве $(E, \|\cdot\|)$ с вложением $u : E^\sharp \to \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство, порождающее X в смысле

$$\mathbf{E}\left[e^{i<x,X>}\right] \;=\; \exp\{-\|u(x)\|_{\mathbf{H}}^2\}, \quad x \in E^\sharp.$$

В этой постановке Кюлбс, Ли и Линде (1993, 1999) доказали, что

$$-\log \mathbf{P}\left[\|X\| < \varepsilon\right] \;\asymp\; \varepsilon^{-\gamma},\ \varepsilon \to 0 \;\Leftrightarrow\; e_n(u) \;\asymp\; n^{-1/2-1/\gamma},\ n \to \infty \tag{7}$$

где $e_n(u)$ это n–ее энтропийное число, т.е.

$$e_n(u) \;=\; \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \exists\, y_1 \ldots y_{2^{k-1}} \in \mathbf{H} \;:\; u(B_{E^\sharp}(0,1)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} B_{\mathbf{H}}(y_i, \varepsilon)\right\}.$$

Ли и Линде (2004) частично обобщили результат для негауссовских процессов и показали, что если X — симметричный α–устойчивый процесс, индуцированный $u : E^\sharp \to \mathbf{H}$ в смысле

$$\mathbf{E}\left[e^{i<x,X>}\right] \;=\; \exp\{-\|u(x)\|_{\mathbf{H}}^\alpha\}, \quad x \in E^\sharp,$$

то

$$e_n(u) \;\succeq\; n^{1/\alpha-1-1/\gamma},\ n \to \infty \;\Rightarrow\; -\log \mathbf{P}\left[\|X\| < \varepsilon\right] \;\succeq\; \varepsilon^{-\gamma},\ \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

Аурцада (2006) доказал, что в той же самой постановке

$$-\log \mathbf{P}\left[\|X\| < \varepsilon\right] \;\preceq\; \varepsilon^{-\gamma},\ \varepsilon \to 0 \;\;\Rightarrow\;\; e_n(u) \;\preceq\; n^{1/\alpha-1-1/\gamma},\ n \to \infty,$$

но в общем случае для негауссовских устойчивых процессов нет соответствия, аналогичного (7).

2. Малые уклонения процессов Леви

Устойчивые процессы Леви в различных нормах. Пусть Z — строго α-устойчивый процесс Леви на $\mathbf{R}$, $\alpha \in (0,2]$. Тогда Z имеет стационарные независимые приращения и является $(1/\alpha)$– автомодельным процессом, т.е.

$$\{Z_{ct},\ t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{c^{1/\alpha} Z_t,\ t \geq 0\}.$$

Мы исключаем гауссовский случай $\alpha = 2$, так что Z имеет траектории со скачками, а также случай, где Z — субординатор (отметим, что в этом случае благодаря монотонности задача малых шаров главным образом одномерная и простая).

Малые уклонения Z возможно рассматривать при помощи следующего семейства норм:

$$\|\cdot\|_1 \leq \ldots \leq \|\cdot\|_p \leq \ldots \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|^\infty \leq \ldots \leq \|\cdot\|^p \leq \ldots \leq \|\cdot\|^1.$$

Величина $\|\cdot\|_p$ — это классическая L_p–норма на $[0,1]$. Величина $\|\cdot\|^p$ — это строгая p–вариационная норма или V_p–норма на $[0,1]$, т.е.

$$\begin{cases} \|f\|^p \ = \ \left(\sup\limits_{0=t_0<\ldots<t_k=1} \sum\limits_{j=1}^{k} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \right)^{1/p} & \text{для } p < \infty, \\ \|f\|^\infty \ = \ \sup\limits_{0 \leq s < t \leq 1} |f(t) - f(s)| & \text{для } p = \infty. \end{cases}$$

Заметим, что для p–вариационной нормы есть предел, после которого проблема становится некорректной. Действительно, Бретаниолл (1972) доказал, что

$$p \leq \alpha \iff \|Z\|^p = +\infty \ \text{ п.н.}$$

Классические нормы (Гельдера, Соболева, и почти все нормы Бесова) исключаются из рассмотрения из–за скачков Z. Когда рассматриваются более тонкие свойства траектории процессов со скачками, можно показать, что V_p–нормы являются хорошей заменой для $(1/p)$–норм Гельдера.

Малые уклонения для L_p–норм. Критическая экспонента не зависит от p, т.е. существует такое $k_p^\alpha \in (0,+\infty)$, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\alpha \log \mathbf{P}\left[\|Z\|_p < \varepsilon\right] = -k_p^\alpha. \tag{9}$$

Случай $p = \infty$ доказан Тейлором (1967) и Могульским (1974). Сравнением можно найти нижнюю оценку для случая $p < \infty$. Существование k_p^α в случае $p < \infty$ впервые заметили Лифшиц и Симон (2005). Нижняя оценка в (9) может рассматриваться как классическое следствие марковского свойства и немонотонности Z. Существование k_p^α следует из субаддитивности в случае $p = \infty$. В частности, из самоподобия следует, что функция $\Phi(x) = \log \mathbf{P}\left[\|Z\|_\infty < x^{-1/\alpha}\right]$ субаддитивна, и в этом случае

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} \quad \text{существует в} \quad [-\infty, 0).$$

В случае $p < \infty$ существование k_p^α следует из субаддитивности функций $\Phi(x) = \log \mathbf{E}\left[\exp\{-x^{p(1/\alpha+1/p)}\|X\|_p^p\}\right]$ и теоремы Де Брейна.

Закон Чунга (6) для устойчивых процессов — это классическое следствие из результата (9). Закон Штрассена доказали Чен, Кюлбсь и Ли (2000) в симметричном случае и Раштон (2005) в несимметричном случае. Доказательство отличается от гауссовской ситуации тем, что устойчивые меры не являются квази–инвариантным. Задача скорости стремления еще не решена. Закон Штрассена для процессов Пуассона с высокой интенсивности показала Шмилева (2005).

Существуют некоторые ситуации, где константа в (3) найдена явно. Так Бертуан (1996) рассчитал константу k_∞^α в случае $\alpha \in (1,2)$ без положительных скачков, используя прямое вычисление на шкальной функции Такакса:

$$k_\infty^\alpha \;=\; 2^{-\alpha} \inf\left\{x > 0,\; E'_\alpha(-x) = 0\right\},$$

где E_α — функция Миттаг-Леффлера с параметром α. Однако, Нгюен-Нгок (2003) заметил, что невозможно определить шкальную функцию, когда Z имеет скачки в обоих направления.

В симметричном случае константы k_2^α определил Щи (1999), используя идентичность по распределению Донати–Мартина, Сонга и Ёра (1994) между L^2–нормой Z и L^α-нормой броуновского движения:

$$k_2^\alpha \;=\; \frac{2^{\alpha/2+1}\pi\,\delta}{\alpha\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}\left(\inf_{f\in\mathcal{A}}\int_{\mathbf{R}} |x|^\alpha f(x)\,dx\right),$$

где δ — параметр интенсивности скачков и $\mathcal{A}$ — множество абсолютно непрерывных плотностей f на $\mathbf{R}$ удовлетворяющих

$$\frac{1}{8}\left(\int_{\mathbf{R}} \frac{(f'(x))^2}{f(x)}\,dx\right) \;\leq\; 1.$$

Эта вариационная формула восходит к Донскеру и Варадану (1975). Старой и сложной задачей является нахождение точного выражения k_p^α в негауссовской *симметричной* рамке $p \in [1, +\infty]$, хотя бы в вариационной форме.

Малые уклонения для V_p–норм. Критическая экспонента зависит от p, т.е. существует такое $k_p^\alpha \in (0, +\infty)$, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\frac{p\alpha}{p-\alpha}} \log \mathbf{P}\left[\|Z\|^p < \varepsilon\right] = -k_p^\alpha.$$

Нижнюю оценку доказал Симон (2004), используя марковское свойство и результаты Симона (2003) о положительности p–вариаций процессов Леви. Существование k_p^α следует из экспоненциальной субаддитивности, как отмечено ранее. Нижнюю оценку k_p^α легко получить сравнением $\|Z\|^p$ и суммы p–степени скачков Z:

$$k_p^\alpha \;\geq\; \left(\frac{p-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\delta\,\Gamma(1-\alpha/p)}{p}\right)^{\frac{p}{p-\alpha}} \tag{10}$$

где δ — параметр интенсивности скачков. Основываясь на результатах Гринвуда (1968) и тауберсковых теоремах, мы предполагаем, что (10) — на самом деле равенство.

Обобщение на неустойчивые процессы Леви. Симметричные α-устойчивые процессы независимо подчинены броуновскому движению с помощью $(\alpha/2)$–устойчивого субординатора с экспонентой Лапласа $\Phi_\alpha(x) = x^\alpha$. В частности, (9) читается

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Phi_\alpha^{-1}(\varepsilon^{-2}) \log \mathbf{P}\left[\|Z\|_p < \varepsilon\right] \;=\; -k_p^\alpha. \tag{11}$$

Линде и Ши (2004) расширили (11) на общий класс процессов Леви, независимо подчиненных броуновскому движению, доказывая что вели чины

$$\Phi^{-1}(\varepsilon^{-2}) \log \mathbf{P}\left[\|Z\|_p < \varepsilon\right] \tag{12}$$

отделены от нуля и от $-\infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$, где Φ — экспонента Лапласа субординатора, для всех $p \in [1, +\infty]$. Метод опирается на результаты теории малых уклонений броуновского движения на фрактальных множествах таких, как множество значений субординатора. Этот результат ведет к гипотезе, что для всех *симметричных* процессов Леви X и всех $p \in [1, \infty]$,

$$\log \mathbf{P}\left[\|X\|_p < \varepsilon\right] \;\asymp\; -\Psi(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

где Ψ — (реальная) экспонента Леви–Хинчина X. На самом деле, для подчиненных процессов Леви справедливо $\Psi(\varepsilon^{-1}) = \Phi(\kappa\varepsilon^{-2})$, где κ — константа нормализации. К сожалению, методом субаддитивности нельзя доказать существование константы в (12). Условие симметрий — естественный первый шаг для исследования малых уклонений общего процесса Леви X. Симон (2001) охарактеризовал ситуацию, где вероятность малых шаров Леви может равняться нулю. Общая задача малых уклонений для всех (симметричных или несимметричных) процессов Леви сложна.

3. Связанные процессы

Пусть Z — действительный α−устойчивый процесс Леви. Для всех $\gamma \geq 0$ определим процесс:

$$I_t^\gamma \; = \; \int_0^t (t-s)^\gamma dZ_s, \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Если $\gamma = n$ натуральное число, то с точностью до константы I^n — это n раз интегрированный устойчивый процесс:

$$I_t^n \; = \; n! \int_0^t \int_0^{s_{n-1}} \ldots \int_0^{s_1} Z_u du \, ds_1 \ldots ds_{n-1}.$$

Если γ действительное число, то I^γ дробно интегрированный устойчивый процесс. В этом случае возникает вопрос об исследовании малых уклонений I^γ. Кроме того, здесь возможно рассматривать более широкое семейство норм, т. к. I^γ становится глаже, когда γ возрастает. Предположим, что справедливо следующее высказывание: *чем глаже процесс, тем вероятнее он принимает значения близкие к нулю.*

Первый шаг к этому принципу сделали Лифшиц и Симон (2005), доказывая в *симметричной* постановке, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha\gamma}} \log \mathbf{P}\left[\|I^\gamma\|_p < \varepsilon\right] = -k_{\gamma,p}^\alpha \in (-\infty, 0). \tag{14}$$

Результат справедлив для более общих норм. Например, выполняется также

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\frac{p\alpha}{p-\alpha+p\alpha\gamma}} \log \mathbf{P}\left[\|I^\gamma\|^p < \varepsilon\right] = -\tilde{k}_{\gamma,p}^\alpha \in (-\infty, 0) \tag{15}$$

для $(1/p)$–гельдерских норм. Подобные результаты доказаны для норм Соболева, Бесова и.т.п. Скорость зависит от степени гладкости процесса. В (14) и (15), существование константы следует из неравенства Андерсона и экспоненциальной субаддитивности. Отметим, что нижняя оценка намного сложнее и чтобы победить другой принцип

Чем глаже процесс, тем труднее задача

нужна новая техника, использующая подходящее разложение I^γ по длинам волн. Возможно добавить к I^γ независимый гладкий процесс с "долгой памятью"

$$M_t^\gamma \; \stackrel{d}{=} \; \int_0^{+\infty} \left((t+s)^\gamma - s^\gamma\right) \, dZ_s$$

и рассматривать дробное устойчивое движение $X^\gamma = I^\gamma + M^\gamma$ (дробное броуновское движение при $\alpha = 2$). С помощью неравенства Андерсона возможно показать, что у X^γ и I^γ те же самые скорости и константы.

Интегрируя по частям, мы видим, что в (13) гладкость I^γ зависит *только* от локального поведения функций $t \mapsto t^\gamma$ около нуля. Следовательно, ожидаем, что наше вышеприведенное высказывание справедливо для более широкого класса процессов вида

$$F_t \;=\; \int_0^t f(t-s)\,dZ_s, \quad t \geq 0$$

где $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ везде гладкая (кроме нуля) функция. Используя слабую версию гауссовской гипотезы, доказанную Ли (1998), Аурцада и Симон (2006) доказали, что если $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ ведет себя как t^γ около нуля, то у F и у I^γ те же самые скорости и константы. Например, броуновское движение ($f \equiv 1$) и процесс Орнштейна–Уленбека ($f(x) = e^x$) обладают теми же самыми малыми уклонениями. Это тоже верно при симметричной устойчивой негауссовской рамке, но наше доказательство опирается отчасти на энтропийные числа с помощью (8) и выполняется к сожалению только для норм L_p и Гельдера.

Благодарность. Благодарю Ларису Джанкозову и Антона Климовского за помощь при написании статьи на русском языке.

Список литературы

1. A. de Acosta. Small deviations in the functional central limit theorem with applications to functional laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.* **11**, 78-101 (1983).
2. F. Aurzada. Metric entropy and the small deviation problem for stable processes. Preprint, 2006.
3. F. Aurzada и T. Simon. Small deviations for stable convolution processes. Опубликуется в *ESAIM Probability & Statistics*, 2006.
4. P. Baldi и B. Roynette. Some exact equivalents for the Brownian motion in Hölder semi-norm. *Prob. Th. Rel. Fields* **93** (4), 457-484, 1992.
5. J. Bertoin. On the first exit time of a completely asymmetric stable process from a finite interval. *Bull. London Math. Soc.* **28** (5), 514-520, 1996.
6. J. Bretagnolle. p-variation de fonctions aléatoires. *Sem. Probab.* **6**, 51-71, 1972.
7. K. L. Chung. On the maximum partial sums of sequence of independent random variables. *Trans. Am. Math. Soc.* **64**, 205-233, 1948.
8. X. Chen, J. Kuelbs и W. V. Li. A functional LIL for symmetric stable processes. *Ann. Probab.* **28** (1), 258-276, 2000.
9. C. Donati-Martin, S. Song и M. Yor. Symmetric stable processes, Fubini's theorem, and some extensions of the Ciesielski-Taylor identities in law. *Stochastics Stochastics Rep.* **50** (1-2), 1-33, 1994.

10. M. D. Donsker и S. R. S. Varadhan. On laws of the iterated logarithm for local times. *Commun. Pure Appl. Math.* **30**, 707-753, 1977.
11. P. E. Greenwood. The variation of a stable path is stable. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* **14**, 140-148, 1969.
12. K. Grill. Exact rate of convergence in Strassen's law of the iterated logarithm. *J. Theor. Probab.* **5** (1), 197-204, 1992.
13. W. V. Li. A Gaussian correlation inequality and its applications to small ball probabilities. *Electron. Commun. Probab.* **4**, 111-118, 1999.
14. W. V. Li и W. Linde. Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures. *Ann. Probab.* **27** (3), 1556-1578, 1999.
15. W. V. Li и W. Linde. Small deviations of stable processes via metric entropy metric entropy. *J. Theoret. Probab.* **17** (1), 261-284, 2004.
16. W. V. Li и Q.-M. Shao. Gaussian Processes: Inequalities, Small Ball Probabilities and Applications. In: *Stochastic processes: Theory and methods, Handbook of Statistics* **19**, 533-597, 2001.
17. W. Linde и Z. Shi. Evaluating the small deviation probabilities for subordinated Lévy processes. *Stoch. Proc. Appl.* **113** (2), 273-288, 2004.
18. M. A. Lifshits и T. Simon. Small deviations for fractional stable processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statistiques* **41** (4), 725-752, 2005.
19. А. А. Могульский. Малые уклонения в пространстве траектории. *Теор. Вер. Прим.* **19**, 726-736, 1974.
20. L. N'Guyen Ngoc. Диссертация, Университет Париж 6, 2003.
21. J. Rushton. A functional law of the iterated logarithm for stable processes and related invariance results. Preprint, 2005.
22. Z. Shi. Lower tails of quadratic functionals of symmetric stable processes. Неопу– бликовано, 1999.
23. E. Yu. Shmileva. Small ball probabilities for a centered Poisson process of high intensity. *J. Math. Sci.* **128** (1), 2656-2668, 2005.
24. Z. Sidák. On multivariate normal probabilities of rectangles: Their dependence on correlations. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1425-1434, 1968.
25. T. Simon. Sur les petites déviations d'un processus de Lévy. *Potential Anal.* **14** (2), 155-173, 2001.
26. T. Simon. Small deviations in p-variation norm for multidimensional Lévy processes. *J. Math. Kyoto Univ.* **43** (3), 943-986, 2003.
27. T. Simon. Small ball estimates in p-variation for stable processes. *J. Theor. Probab.* **17** (4), 1013-1036, 2004.
28. S. J. Taylor. Sample path properties of a transient stable process. *J. Math. Mech.* **16**, 1229–1246, 1967.

Département de mathématiques, Université d'Évry-Val d'Essonne, Cours Monseigneur Romero, F-91025 Evry Cedex, France
E-mail address: tsimon@univ-evry.fr